Elastische Durchbiegung als Schätzfunktion für die viskose Verformung von Quarzglas

Autoren: Bob Giddiness
Fred Ahlgren
Revision: Dick Mace

Bericht Nr. GEQ 2000-01

Zusammenfassung

Die elastische Durchbiegung von Quarzstrukturen bei Zimmertemperatur kann zur Vorhersage der Durchbiegung der Struktur bei hohen Temperaturen dienen. Der ermittelte Unterschied zwischen der elastischen und der plastischen Durchbiegung kann zeigen, dass die viskose Durchbiegung bei vielen Strukturen proportional zur elastischen Verformung ist.

Stichwörter: Quarz-Durchbiegung, plastisch, elastisch, Viskosität, Young-Modul, Hochtemperatur

Beim Einsatz von Quarzglas unter hohen Temperaturen ist die Vorhersagbarkeit einer eventuellen Verformung der Quarzstruktur beim Gebrauch von Interesse. Eine genaue Bestimmung der potentiellen zeitabhängigen Verformung der Struktur kann während der tatsächlichen Anwendung oder durch detaillierte Analysen erfolgen. Zur Bestimmung der Verformung der Struktur unter hohen Temperaturen kann ein anderer Ansatz verwendet werden: Durch den Vergleich zwischen der elastischen Verformung der Struktur bei Zimmertemperatur mit einer einfachen Referenzgeometrie kann die erwartete Verformungsrate der Struktur errechnet werden. In diesem Dokument wird die Technik und das Grundprinzip für die Schätzung der Durchbiegungsrate anhand einer Funktion von Biegungsmesswerten beschrieben, die bei Zimmertemperatur ermittelt werden können.

Quarzglas ist das einfachste Kieselglas. Es verhält sich bei Zimmertemperatur rein linear-elastisch. Die Größe und die Lage der maximalen Spannungen sind durch eine lineare mechanische Analyse feststellbar.

Das Verhalten von Quarzglas bei hohen Temperaturen hängt von seinem Spannungszustand und seiner Viskosität unter diesen Temperaturen ab. Durch Scherkräfte verschieben sich Atome und Molekülgruppen relativ zueinander. Die Viskosität ist das Maß dafür, wie gut eine Flüssigkeit Scherbewegungen widerstehen kann. Die Viskosität ist eine Eigenschaft der flüssigen Phase und der Kehrwert der Fluidität (h=1/Fluidität). Typische Einheiten der Viskosität sind Pascal * Sekunden und Poise (1 Pa*s=10 Poise). Die Viskosität eines Glases ist eine monotone Funktion der Temperatur. Sie reicht von mehr als 1020 Poise (feste Phase) bei Zimmertemperatur bis 104 bei Einsatztemperatur des Glases. Ein Material mit einer Viskosität von 104 Poise ist zwar steif, kann aber in verschiedene Formen gedrückt oder gezogen werden. Die Viskosität entspricht einer Verhältnisgleichung des Arrhenius-Typs, d. h. H=hoexp (DG/RT).

Dabei ist H die Viskosität, ho eine vor-exponentielle Konstante, DG die "Aktivierungsenergie" oder Temperaturabhängigkeit der Viskosität, R die Gaskonstante und T die absolute Temperatur.

Wenn eine Scherspannung auf elastische Strukturen oder Körper einwirkt, werden diese einer fast sofortigen (von der Schallgeschwindigkeit in diesem Material abhängigen) elastischen Durchbiegung unterworfen und in eine neue Gleichgewichtsform gebracht. Sobald die neue elastische Gleichgewichtsform hergestellt ist, verhält sich das Ausmaß jeder neuen Verformung linear zu der Scherspannung und umgekehrt linear zur Viskosität. Wenn eine Scherspannung auf einen viskosen Körper einwirkt, beginnt dieser sich zu verformen oder mit der Zeit zu strömen. Die Strömungsgeschwindigkeit ist dabei umgekehrt proportional zu seiner Viskosität. Unterhalb von 800 °C ist die Viskosität von Quarzglas so hoch, dass das Material im Wesentlichen fest ist. Oberhalb von 800 °C ist jedoch eine Verformung durch viskose Strömung möglich.

Viele Viskositäts-Probleme können anhand eines analogen elastischen Problems gelöst werden. Dies gilt für stark viskose Körper wie z. B. Quarz, wo die Abhängigkeit der

Arbeitstemperatur von der Viskosität die Vorhersage der Verformung der Glasstruktur bei hohen Temperaturen ermöglicht.

Bei einem linearen viskoelastischen System wie Quarzglas ist das Verhältnis der viskosen Verformungsrate einer Struktur zu deren elastischen Durchbiegung eine nur von der Temperatur abhängige Konstante (K). Wenn K das Verhältnis der Verformungsrate zur elastischen Durchbiegung ist, kann das Verhältnis wie folgt dargestellt werden:

$$K = \frac{1\ E}{3\ \eta}$$

Als Beispiel soll ein punktbelasteter runder Stab mit dem Radius 'a', einem Belastungsumfang 'L' und einer Last 'P' betrachtet werden. Hierbei kann die Verformungsrate wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{\text{Verformung}}{\text{Zeit}} = \frac{2PL^3}{72\pi\eta a^4}$$

Die elastische Durchbiegung kann dargestellt werden als: Ersatz der oben genannten Beziehung durch das Trägheitsmoment der

$$\text{Durchbiegung} = \frac{PL^3}{48EI}$$

dabei ist 'I' das Trägheitsmoment. Für einen runden Stab ist das Trägheitsmoment:

$$I = \frac{\pi(2a)^4}{64}$$

Wenn die obige Beziehung gegen das Trägheitsmoment in der Durchbiegungs-Gleichung ausgetauscht und das Verformungsverhältnis auf die elastische Durchbiegung angewandt wird, ergibt sich:

$$\frac{\dfrac{\text{Verformung}}{\text{Zeit}}}{\text{Durchbiegung}} = \frac{\dfrac{2PL^3}{72\pi\eta a^4}}{\dfrac{PL^3}{48EI}} = \frac{1\ E}{3\ \eta}$$

Ähnlich verhält es sich für einen an vier Punkten belasteten runden Stab. Wenn 'L' die Stützlänge und 'x' der Abstand zwischen den Lastpunkten ist, ist das Verhältnis der Verformungsrate zur elastischen Durchbiegung:

$$\frac{\dfrac{\text{Verformung}}{\text{Zeit}}}{\text{Durchbiegung}} = \frac{\dfrac{P(L\text{-}x)(2L^2 + 2Lx\text{-}x^2)}{72\pi\eta a^4}}{\dfrac{Pc(3L2 - 4c)}{48EI}} = \frac{1\ E}{3\ \eta}$$

wobei 'I' das Trägheitsmoment der obigen Beziehung ist sowie

$$C = \frac{(L - x)}{2}$$

Aus dem oben Gesagten ergibt sich eine wichtige Erkenntnis: Das Verhältnis der elastischen Durchbiegung zweier Strukturen ist auch das Verhältnis ihrer Verformungsraten. Bei einer komplizierten Struktur, deren Trägheitsmoment schwierig zu berechnen ist, kann man trotzdem die Verformungsrate während des Betriebs abschätzen. Die Verformungsrate wird berechnet, indem die elastische Durchbiegung der Struktur bei Zimmertemperatur gemessen und mit dem Quotienten aus der Verformungsrate und Durchbiegungsrate einer ähnlich belasteten einfachen Struktur bei der gewünschten Temperatur multipliziert wird. Es folgt eine Gleichung zu dieser Berechnung:

$$\text{Verformungsrate der Struktur} = \frac{\text{elastische Verformung der Struktur}}{\text{Verformungsrate der einfachen Struktur}} \times \text{Verformungsrate der einfachen Struktur}$$

Im angefügten Rechenbeispiel wird eine Berechnungsgrundlage für die Durchbiegung und Verformung einfacher Strukturen nach einer festen Zeitspanne und bei unterschiedlichen Temperaturen gegeben. In der obigen Gleichung kann sowohl die Verformungsrate als auch die gesamte Verformungsrate nach einer gegebenen Zeitspanne verwendet werden:

$$\text{Gesamtverformung der Struktur} = \frac{\text{elastische Verformung der Struktur}}{\text{elastische Verformung der einfachen Struktur}} \times \text{Gesamtverformung der einfachen Struktur}$$

Bei einer an beiden Enden gestützten Struktur von 1 Meter Länge mit einer gleichmäßig verteilten Last von 1000 Gramm soll die Durchbiegung nach 1000 Stunden bei 1000 °C ermittelt werden. Hierzu wird die Durchbiegung der Struktur unter Belastung bei Zimmertemperatur gemessen. Die elastische Durchbiegung beträgt 0,002 cm, die Durchbiegung nach 1000 Stunden bei 1000 °C beträgt 0,9746 cm. Zur Schätzung der Durchbiegung der Struktur nach 1000 Stunden bei 1000 °C wird die obige Gleichung für die gesamte Verformung verwendet:

$$\text{Durchbiegung} = \frac{0.002}{0.0713} \times .9746$$

Nach 1000 Stunden bei 1000 °C beträgt die Durchbiegung der Struktur also 0,0273 cm.